

Salih Mešanović, prof
Mr.sci. Ramiz Kikanović
Mr.sci. Akif Delić

Interkalarne kamate i njihov obračun

Sažetak

Uvođenjem većeg broja kapitalizacija tokom jednog ugovorenog obračunskog perioda međusobnog poslovanja ima za cilj brži protok kapitala i uvođenje finansijske discipline u dužničko-povjereničkim odnosima i drugim vrstama poslovanja.

Veći broj kapitalizacija nameće potrebu uvođenja interkalarne kamate, kao regularnog postupka, sa ciljem povećanja finansijske discipline u raznim finansijskim transakcijama.

Poseban značaj ovog stručnog članka je njegov, uglavnom istraživački karakter, počev od definicije interkalarnih kamata, izvođenja formula za njihov obračun do primjene. Primjena interkalarnih kamata je usmjerena na dužničko -povjereničke odnose međusobnog poslovanja. Međutim, sva iznesena teorija o obračunu interkalarnih kamata može biti primijenjena kod depozita i sličnih oblika raspolaganja sa kamatonosnim kapitalom.

Ključne riječi:

Jedinični (nominalni) vremenski interval, nominalna kamatna stopa, nominalni kamatni faktor, veći broj kapitalizacija, konformna kamatna stopa, konformni kamatni faktor, redovna kamata, interkalarna kamata.

Summary

The aim of the introduction of an increased number of capitalizations during one agreed accounting period of mutual business operations is to achieve fester flow of capital and introduction of financial discipline in debtor-trustee relationship and other type of business operations.

An increased number of capitalizations create the need for the introduction of intercalary interest, as a regularly procedure, with the purpose of financial discipline enforcement in various financial transactions.

Special significance of this paper is its exploratory character starting with the definition of intercalary interests, devising of formulas for the computation of interests as well as their application. The application of intercalary interest is directed to debtor-trustee relationship of mutual business operations. However, previously mentioned theory of intercalary interest accounting can be applied in deposits and similar forms of the disposal of interest-bearing capital.

Key words:

Nominal time interval, nominal interest rate and nominal interest factor, increased number of capitalizations, conforming interest rate and conforming interest factor, fixed interest, intercalary interest

Uvod

U našoj ekonomskoj literaturi pojam interkalarne kamate se često poistovjećuje sa pojmom odgođene kamate. Odgođena kamata je prisutna uglavnom kod dugoročnih, investicionih zajmova za neki greis period plaćanja. U ovom slučaju, za taj greis period (period odgođenog plaćanja) vrši se obračun kamate, a glavnica ostaje ista. Plaćanje ove vrste kamate vrši se na dva načina:

- 1) u greis periodu, a glavnica ostaje ista,
- 2) kamata iz greis perioda se dodaje glavnici kada počinje njena otplata.

Dakle, odgođena kamata je kamata na glavnicu prije početka njene otplate.

Autori ovog stručnog članka imaju tri cilja:

- 1) definisati intakalarne kamate,
- 2) izvesti odgovarajuće formule za obračun interkalarnih kamata, i
- 3) ukazati na potrebu uođenja u primjenu interkalarnih kamata.

1. Definicija interkalarne kamate

U dužničko-povjereničnim odnosima povjerioci nekada vrše više kapitalizacija u jednoj godini. Ako drugačije nije dogovoreno jedinični (nominalni) vremenski interval je jedna godina, a kapitalizacija je godišnja i dekurzivna. Nominalni vremenski interval ima odgovarajuću nominalnu kamatnu stopu. Dakle, nominalna kamatna stopa je uglavnom godišnja, dekurzivna kamatna stopa.

Neki povjerioci u dužničko-povjereničnim odnosima od dužnika uzimaju kamatu anticipativno (unaprijed), odnosno, na početku otplatnog roka. Obračun ovakve vrste kamate povjerioci vrše na osnovu dekurzivne kamatne stope pri čemu nastaje nova vrsta kamatne stope pod nazivom anticipativna kamatna stopa. Anticipativna kamatna stopa je veća od dekurzivne stope. Primjena anticipativne kamatne stope nije regularan postupak jer povjeriocima donosi dio neregularne dobiti na razlici u kamatama, a dužnike šteti za taj iznos.

U današnje vrijeme jedinični vremenski interval, odnosno, jedna godina je dug vremenski interval za obračun kamata u dužničko-povjereničnim odnosima. Iz tog razloga povjerioci, a posebno banke vrše kapitalizacije više puta tokom jedne godine i to uglavnom: semestralno, kvartalno, mjesečno i dnevno.

Povećanjem obima proizvodnje, razmjene i potrošnje na domaćem i stranom tržištu, razvojem informacionih sistema i računarstva navodi na potrebu dnevnih kapitalizacija. Neke banke mogu vršiti kapitalizaciju svakog sata ili u svakom trenutku, odnosno, kontinuirano (neprekidno). Češće kapitalizacije doprinose korektnijem poslovanju u dužničko-povjereničkim odnosima ako su povjerioci za period kapitalizacije u mogućnosti od dužnika naplatiti kamatu.

Međutim, iz raznih razloga dužnici nisu u mogućnosti naplatiti kamate od dužnika za svaki period kapitalizacije nego ih naplaćuju za duže vremenske intervale: godine, semestre, kvartale i mjesece. Za kraće vremenske intervale od navedenih u kojima povjerioci vrše kapitalizaciju povjerioci imaju pravo na kamatu od kamate prispjele za taj period kapitalizacije sve do prvog perioda kapitalizacije kada se može naplatiti redovna kamata za protekli vremenski interval.

Dakle, kamate od kamate za periode kapitalizacije za koje nije naplativa ugovorena redovna kamata imaju naziv interkalarne (međuvremene) kamate.

Za ugovorenu godišnju dekurzivnu naplatu kamate i za semestralne kvartalne, mjesečne i dnevne kapitalizacije možemo napraviti pregled kapitalizacija za obračun interkalarnih kamata.

1) Za semestralne kapitalizacije:

Interaktivne kamate nastaju u 2. semestru, kao kamate na kamatu iz 1. semestra, primjenom semestralne, konformne kamatne stope.

2) Za kvartalne kapitalizacije:

Interkalarne kamate nastaju u 2, 3. i 4. periodu kapitalizacije, kao kamate na kamatu iz 1, 2. i 3. perioda kapitalizacije, primjenom kvartalne, konformne kamatne stope.

3) Za mjesečne kapitalizacije:

Interkalarne kamate nastaju u 2, 3, ..., 11. i 12. mjesecu, kao kamate na kamatu iz 1, 2, ..., 10. i 11. mjeseca, primjenom mjesečne, konformne kamatne stope.

4) Za dnevne kapitalizacije proste godine:

Interkalarne kamate nastaju na kraju 2, 3, ..., 364. i 365. dana, kao kamate na kamatu iz 1, 2, ..., 363. i 364. dana, primjenom dnevne, konformne kamatne stope za prostu godinu.

5) Za dnevne kapitalizacije prestupne godine:

Interkalarne kamate nastaju na kraju 2, 3, ..., 365. i 366. dana kao kamate na kamatu iz 1, 2, ..., 264. dana, primjenom dnevne konformne kamatne stope prestupne godine.

Dakle, za obračun interkalarnih kamata treba koristiti konformnu, dekurzivnu kamatnu stopu.

Autori ovog stručnog rada imaju slijedeće ciljeve:

- 1) definisati interkalarnu kamatu,
- 2) izvesti formulu za obračun interkalarnih kamata, i
- 3) istaknuti razloge definisanja i primjenu interkalarnih kamata.

Na osnovu definicije interkalarne kamate možemo izvesti njen obračun bez formule, za manji broj kapitalizacija u jednom roku plaćanja redovnih kamata.

Primjer 1.

Ugovoren je obračun redovne kamate godišnje dekurzivno. Obračunati redovne i interkalarne kamate za jednu godinu na iznos 35 210,00 KM uz godišnju kamatnu stopu 8,35 %, ako su ugovorene slijedeće kapitalizacije:

- a) semestralne,
- b) kvartalne, i
- c) mjesečne.

Podaci:

$G_0 = 35\,210,00$ KM (iznos glavnice; početni kapital)

$p = 8,35\%$ (godišnja kamatna stopa)

a) $m = 2$ (broj kapitalizacija u jednoj godini)

$K = ?$ (iznos redovne kamate)

$K_i = ?$ (iznos interkalarne kamate)

b) $m = 4$ (broj kapitalizacija u jednoj godini)

$K = ?$ (iznos redovne kamate)

$K_i = ?$ (iznos interkalarne kamate)

c) $m = 12$ (broj kapitalizacija u jednoj godini)

$K = ?$ (iznos redovne kamate)

$K_i = ?$ (iznos interkalarne kamate)

Iz procentnog zapisnog oblika, $p = 8,35\%$ za godišnju kamatnu stopu proizilazi njen intenzitet, $p = 0,083\ 500$, odakle je intenzitet godišnjeg dekurzivnog kamatnog faktora, $r = 1,083\ 500$.

Iznos redovne kamate za sve tri vrste kapitalizacije je isti, a određen je formulom, $K = G_0 p$.

Zamjenom podataka redovna kamata iznosi:

$$K = 35\ 210,00\ \text{KM} \cdot 0,083\ 500 = 2\ 940,035\ \text{KM}.$$

a) Interkalarne kamate za semestralne, dekurzivne kapitalizacije:

U ovom slučaju interkalarne kamate nastaju u 2. semestru, kao kamata od kamate iz 1. semestra, primjenom semestralne, konformne, dekurzivne kamatne stope čiji intenzitet određuje formula:

$$p_1 = \sqrt[m]{r} - 1.$$

Zamjenom podataka proizilazi: $p_1 = \sqrt{1,083\ 5} - 1 = 0,040\ 913\ 060$

Redovnu kamatu za 1. semestar određuje, $K_1 = G_0 p_1$, odnosno, zamjenom podataka:

$$K_1 = 35\ 210,00\ \text{KM} \cdot 0,040\ 913\ 060 = 1\ 440,548\ 843\ \text{KM} \approx 1\ 440,55\ \text{KM}.$$

Interkalarne kamate određuje relacija: $K_i = K_1 p_1$, odnosno, zamjenom podataka:

$$K_i = 1\ 440,548\ 843\ \text{KM} \cdot 0,040\ 913\ 060 = 58,937\ 261\ 25\ \text{KM} \approx 58,94\ \text{KM}.$$

Dakle, iznos interkalarnih kamata je, $K_i = 58,94\ \text{KM}$.

b) Interkalarne kamate za kvartalne, dekurzivne kapitalizacije:

Za obračun interkalarne kamate potreban je intenzitet kvartalne, konformne, dekurzivne kamatne stope (p_1) i iznos redovne, kvartalne kamate. Intenzitet, kvartalne, konformne kamatne stope određuje formula:

$$p_1 = \sqrt[m]{r} - 1 = r^{\left(\frac{1}{m}\right)} - 1$$

Zamjenom podataka, $p_1 = 1,083\ 5^{\left(\frac{1}{4}\right)} - 1 = 0,020\ 251\ 469$

Iznos redovne kamate (K_1) za jedan kvartal određuje:

$K_1 = G_0 p_1$, odnosno, zamjenom podataka,

$$K_1 = 35\ 210,00\ \text{KM} \cdot 0,020\ 251\ 469 = 713,054\ 223\ 5\ \text{KM}.$$

Interkalarne kamate za 2,3. i 4. kvartal određuje formula:

$K_{i1} = K_1 (r_1^3 - 1)$, a zamjenom podataka,

$$K_{i1} = 713,054\ 223\ 5\ \text{KM} \cdot (1,020\ 251\ 469^3 - 1) = 44,204\ 426\ 5\ \text{KM} \approx 44,20\ \text{KM}.$$

Interkalarne kamate za 3. i 4. kvartal određuje formula:

$K_{i2} = K_1 (r_1^2 - 1)$, a zamjenom podataka,

$$K_{i2} = 713,054\ 223\ 5\ \text{KM} \cdot (1,020\ 251\ 469^2 - 1) = 29,173\ 230\ 23\ \text{KM} \approx 29,17\ \text{KM}.$$

Interkalarne kamate za 4. kvartal određuje formula:

$K_{i3} = K_1 (r_1 - 1) = K_1 p_1$, a zamjenom podataka,

$$K_{i3} = 713,054\ 223\ 5\ \text{KM} \cdot (1,020\ 251\ 469 - 1) = 14,440\ 395\ 5\ \text{KM} \approx 14,44\ \text{KM}.$$

Ukupan iznos interkalarnih kamata (K_i) određen je iz:

$K_i = K_{i1} + K_{i2} + K_{i3}$, odnosno, zamjenom izračunatih iznosa:

$$K_i = (44,20 + 29,17 + 14,44)\ \text{KM} = 87,757\ \text{KM} \approx 87,76\ \text{KM}.$$

Dakle, interkalarne kamate sa kvartalnim kapitalizacijama iznose, $K_i = 87,76\ \text{KM}$.

c) Interkalarne kamate za mjesečne, dekurzivne kapitalizacije:

Za mjesečne kapitalizacije iznos interkalarnih kamata određuje intenzitet mjesečne, konformne, dekurzivne kamatne stope (p_1) i redovna, mjesečna kamata.

Intenzitet mjesečne, konformne, dekurzivne kamatne stope određuje formula:

$$p_1 = \sqrt[m]{r} - 1 = r^{\left(\frac{1}{m}\right)} - 1.$$

Zamjenom podataka, $p_1 = 1,0835^{\left(\frac{1}{12}\right)} - 1 = 0,006705426$

Iznos redovne, mjesečne kamate određuje formula: $K_1 = G_0 p_1$, odnosno zamjenom podataka,

$$K_1 = 35\,210,00 \text{ KM} \cdot 0,006705426 = 236,098\,049\,5 \text{ KM} \approx 236,10 \text{ KM}.$$

Interkalarne kamate za 2,3, ..., 11. i 12. mjesec iznose:

$$K_{i1} = 236,098\,049\,5 \text{ KM} \cdot (1,006705426^{11} - 1) = 18,010\,280\,87 \text{ KM} \approx 18,01 \text{ KM}.$$

Interkalarne kamate za 3,4, ..., 11. i 12. mjesec iznose:

$$K_{i2} = 236,098\,049\,5 \text{ KM} \cdot (1,006705426^{10} - 1) = 16,317\,725\,57 \text{ KM} \approx 16,32 \text{ KM}.$$

Na sličan način su izračunate interkalarne kamate:

$$K_{i3} = 14,64 \text{ KM}, K_{i4} = 12,97 \text{ KM}, K_{i5} = 11,31 \text{ KM}, K_{i6} = 9,66 \text{ KM}, K_{i7} = 8,02 \text{ KM}, K_{i8} = 6,40 \text{ KM}, K_{i9} = 4,78 \text{ KM}, K_{i10} = 3,18 \text{ KM} \text{ i } K_{i11} = 1,58 \text{ KM}.$$

Ukupan iznos interkalarnih kamata (K_i) određuje:

$$K_i = K_{i1} + K_{i2} + \dots + K_{i11}, \text{ a poslije sabiranja izračunatih iznosa proizilazi,}$$

$$K_i = 106,87 \text{ KM}.$$

Poredeći iznos interkalarnih kamata semestralnih, kvartalnih i mjesečnih dekurzivnih kapitalizacija, možemo zapaziti da se njihovi iznosi povećavaju sa povećavanjem broja kapitalizacija u jednoj godini (prilog tabelarni pregled kamata).

m	p_1 i r_1	K	K_1	K_i	$K + K_i$
2	0,040 913 060 1,040 913 060	2 940,04	1 440,55	58,94	2 998,98
4	0,020 251 469 1,020 251 469	2 940,04	713,05	87,76	3 027,80
12	0,006 705 426 1,006 705 426	2 940,04	263,10	106,87	3 046,91

Slika 1: Tabelarni pregled kamata

Uvođenje interkalarnih kamata u dužničko-povjereničkim odnosima može dužnike stimulusati da skraćuju rokove plaćanja redovnih kamata, a posebno kad povjerioci vrše češće kapitalizacije. U današnje vrijeme je moguće vršiti kontinuirane (neprekidne) kapitalizacije uz uslov da se koristi neki vremenski interval (1 dan, 1 minuta, 1 sekunda i sl.), kada je moguće obračun kamata koristeći odgovarajuću konformnu kamatnu stopu.

Urađeni primjer sa semestralnim, kvartalnim, mjesečnim kapitalizacijama je pokazao postupak obračuna interkalarnih kamata za relativno mali broj kapitalizacija. Neophodno je izvesti formulu za izračunavanje iznosa interkalarnih kamata kada je broj kapitalizacija (m) između dva uzastopna uzimanja redovnih kamata neograničen broj, $m \geq 2$.

2. Formule za obračun dekurzivnih, interkalarnih kamata

Do prve uplate i između svake dvije uplate redovnih, dekurzivnih kamata moguće je izvršiti obračun interkalarnih kamata za bilo koji broj kapitalizacija (m).

U prethodnom primjeru izvršen je obračun interkalarnih kamata za godišnje, dekurzivne uplate redovnih kamata i semestralne, kvartalne i mjesečne kapitalizacije. Ovakav postupak bio bi spor, a često i neracionalan posebno za veći broj kapitalizacija u jednoj godini (dekurzivne dnevne, satne, minutne i sekundne kapitalizacije). Da bi obračun interkalarnih kamata bio jednostavan, brz i racionalan postupak potrebno je izvesti opću formulu koju možemo koristiti uz pomoć džepnih i PC računara.

Za izvođenje formule, potrebno je uvesti potreban broj veličina sa njihovim oznakama, od kojih zavisi iznos interkalarnih kamata za svaki rok plaćanja redovnih kamata.

Te veličine su:

p (nominalna, dekurzivna kamatna stopa),

r (nominalni, dekurzivni kamatni faktor),

n (broj uplata redovnih kamata),

m (broj kraćih jednakih rokova u jednom roku plaćanja redovnih, dekurzivnih kamata; broj kapitalizacija)

G_0, G_1, \dots, G_n (iznosi za obračun redovnih, dekurzivnih kamata)

p_1 (konformna, dekurzivna kamatna stopa za jedan od (m) jednakih perioda kapitalizacije)

r_1 (konformni, dekurzivni kamatni faktor za jedan od (m) jednakih perioda kapitalizacije)

K_1, K_2, \dots, K_{m-1} (iznosi redovnih, dekurzivnih kamata)

K_i (ukupan iznos interkalarnih kamata za jedan otplatni rok redovnih kamata)

$K_1', K_2', \dots, K_{m-1}'$ (iznosi redovnih, dekurzivnih kamata za jedan od ($m-1$) perioda kapitalizacije)

$K_{1i}, K_{2i}, \dots, K_{(m-1)i}$ (iznosi interkalarnih kamata zavisnih od redovnih periodičnih kamata, K_1, K_2, \dots, K_{m-1})

Redovne, dekurzivne kamate po rokovima plaćanja iznose:

$K_1 = G_0 p$ (plaćene krajem 1. roka)

$K_2 = G_1 p$ (plaćene krajem 2. roka)

\dots
 $K_n = G_{m-1} p$ (plaćene krajem n -tog roka)

Za prvi rok plaćanja redovnih, dekurzivnih kamata, interkalarne kamate iznose:

$K_{1i} = K_1' (r_1^{m-1} - 1) = G_0 p_1 (r_1^{m-1} - 1)$ (iznos interkalarnih kamata, za ($m-1$) perioda kapitalizacije)

$K_{2i} = K_2' (r_1^{m-2} - 1) = G_0 p_1 (r_1^{m-2} - 1)$ (iznos interkalarnih kamata, za ($m-2$) perioda kapitalizacije)

\dots
 $K_{(m-1)i} = K_{(m-1)'} (r_1 - 1) = G_0 p_1 (r_1 - 1)$ (iznos interkalarnih kamata, za posljednji od (m) perioda kapitalizacije)

Iznosi interkalarnih kamata od K_{1i} do $K_{(m-1)i}$ predstavljaju brojni strogo, opadajući niz, a iznosi interkalarni kamata od $K_{(m-1)i}$ do K_{1i} predstavljaju brojni, strogo rastući niz.

Ukupan iznos interkalarnih kamata (K_i) određuje zbir periodičnih interkalarnih kamata napisanih u rastućem poretku: $K_i = K_{(m-1)i} + K_{(m-2)i} + \dots + K_{1i}$.

Uvođenjem zamjene periodičnih interkalarnih kamata od, $K_{(m-1)i} = G_0 p_1 (r_1 - 1)$ do $K_{1i} = G_0 p_1 (r_1^{m-1} - 1)$ interkalarne kamate (K_i) iznose:
 $K_i = G_0 p_1 (r_1 - 1) + G_0 p_1 (r_1^2 - 1) + \dots + G_0 p_1 (r_1^{m-1} - 1)$, odnosno,
 $K_i = G_0 p_1 r_1 + G_0 p_1 r_1^2 + \dots + G_0 p_1 r_1^{m-1} - (m-1) G_0 p_1$

Zbir: $G_0 p_1 r_1 + G_0 p_1 r_1^2 + \dots + G_0 p_1 r_1^{m-1}$ predstavlja zbir od $(m-1)$ članova rastućeg geometrijskog niza, $\left(S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$, gdje je prvi član niza, $a_1 = G_0 p_1 r_1$, količnik niza, $q = r_1$ i broj članova niza, $n = m - 1$.

Na osnovu uvedenih relacija proizilaze jednakosti:

$$G_0 p_1 r_1 + G_0 p_1 r_1^2 + \dots + G_0 p_1 r_1^{m-1} = G_0 p_1 r_1 \frac{r_1^{m-1} - 1}{r_1 - 1}, i$$

$$K_i = G_0 p_1 r_1 \frac{r_1^{m-1} - 1}{r_1 - 1} - (m-1) G_0 p_1.$$

Zamjenom, $p_1 = r_1 - 1$ i uređivanjem prethodna formula dobiva oblik:

$$K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1).$$

Dakle, izvedena formula, $K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, za izračunavanje iznosa interkalarnih kamata, za prvi otplatni period redovnih kamata, kada je poznat iznos početnog kapitala (G_0), intenzitet, konformnog kamatnog faktora (r_1) i broj kapitalizacija (m). Zamjenom iznosa (G_0), iznosom kapitala: G_1, G_2, \dots, G_{n-1} nastaju formule za izračunavanje iznosa interkalarnih kamata od drugog do $(n-1)$ perioda plaćanja redovnih kamata.

Zamjenom podataka iz prethodnog zadatka u izvedenu formulu, možemo provjeriti regularnost formule, poređenjem iznosa interkalarnih kamata, semestralnih, kvartalnih i mjesečnih kapitalizacija tokom jedne godine.

a) Interkalarne kamate semestralnih dekurzivnih kapitalizacija:

Iz, $K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, zamjenom podataka za,
 $G_0 = 35\,210,00$ KM, $r_1 = 1,040\,913\,060$ i $m = 2$ proizilazi:

$$K_i = 35\,210 (1,040\,913\,060^2 - 2 \cdot 1,040\,913\,060 + 1) = 58,937\,261\,23 \approx 58,94$$

Izračunati iznos interkalarnih, dekurzivnih kamata, $K_i = 58,94$ KM je isti kao u prethodnom zadatku.

b) Interkalarne kamate kvartalnih dekurzivnih kapitalizacija:

Iz, $K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, zamjenom podataka za,
 $G_0 = 35\,210,00$ KM, $r_1 = 1,020\,251\,469$ i $m = 4$ proizilazi:

$$K_i = 35\,210 (1,020\,251\,469^4 - 2 \cdot 1,020\,251\,469 + 3) = 87,818\,052\,23 \approx 87,82$$

Izračunati iznos interkalarnih, dekurzivnih kamata, $K_i = 87,82$ KM je za 0,06 KM veći od iznosa u prethodnom zadatku.

c) Interkalarne kamate mjesečnih dekurzivnih kapitalizacija:

Iz, $K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, zamjenom podataka za,
 $G_0 = 35\,210,00$ KM, $r_1 = 1,006\,705\,426$ i $m = 12$ proizilazi:

$$K_i = 35\,210 (1,006\,705\,426^{12} - 2 \cdot 1,006\,705\,426 + 1) = 106,858\,159\,4 \approx 106,86$$

Izračunati iznos interkalarnih, dekurzivnih kamata, $K_i = 106,86$ KM je za 0,01 KM manji od iznosa u prethodnom zadatku.

Dakle, interkalarne, dekurzivne kamate prezentuju slijedeće formule:

$K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$ za 1. period plaćanja redovnih kamata,

$K_i = G_1 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$ za 2. period plaćanja redovnih kamata,

.....
 $K_i = G_{n-1} (r_1^m - m r_1 + m - 1)$ za n-ti period plaćanja redovnih kamata.

Primjenom izvedenih formula možemo brzo, jednostavno i precizno izračunati iznos interkalarnih kamata za bilo koji broj (m) kapitalizacija u jednom periodu plaćanja redovnih kamata.

Primjer 2.

Izračunati iznose interkalarnih kamata za dnevne i satne dekurzivne kapitalizacije. Podatke početnog iznosa kapitala (G_0) i godišnje kamatne stope (p) uzeti iz prethodnog zadatka.

Podaci:

$G_0 = 35\,210,00$ KM (iznos početnog kapitala)

$p = 8,35\%$ (godišnja kamatna stopa)

a) $m = 365$ (broj dnevnih kapitalizacija u jednoj prostoj godini)

b) $m = 8\,760$ (broj satnih kapitalizacija u jednoj prostoj godini)

a) $K_i = ?$ (iznos interkalarnih kamata za, $m = 365$)

b) $K_i = ?$ (iznos interkalarnih kamata za, $m = 365 \cdot 24 = 8\,760$)

a) Iznos interkalarnih kamata za dnevne, dekurzivne kapitalizacije:

Intenzitet dnevnog, konformnog, dekurzivnog kamatnog faktora (r_1) određuje,

$$r_1 = \sqrt[m]{r} \quad \text{za } r = 1,083\,5 \text{ i } m = 365$$

$$r_1 = \sqrt[365]{1,083\,5} = 1,083\,5^{\left(\frac{1}{365}\right)} = 1,000\,219\,741$$

Formula, $K_i = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, zamjenom podataka određuje iznos interkalarnih kamata:

$$K_i = 35\,210 (1,000\,219\,741^{365} - 365 \cdot 1,000\,219\,741 + 364) = 116,004\,853\,3 \approx 116,00$$

Dakle, interkalarne kamate za dnevne, dekurzivne kapitalizacije iznose, $K_i = 116,00$ KM.

b) Iznos interkalarnih kamata za satne, dekurzivne kapitalizacije:

Za, $m = 365 \cdot 24 = 8\,760$ i $r = 1,083\,5$ intenzitet satnog, konformnog, dekurzivnog kamatnog faktora (r_1) iznosi:

$$r_1 = \sqrt[8\,760]{1,083\,5} = 1,083\,5^{\left(\frac{1}{8\,760}\right)} = 1,000\,009\,155$$

Interkalarne kamate (K_i) određuje:

$$K_i = 35\,210 (1,000\,009\,155^{8\,760} - 8\,760 \cdot 1,000\,009\,155 + 8\,759) = 116,304\,45 \approx 116,30$$

Dakle, interkalarne kamate za satne, dekurzivne kapitalizacije iznose, $K_i = 116,30$ KM.

Uzimanje interkalarnih kamata je regularan postupak uz pristanak dužnika u dužničko-povjereničnim odnosima. U prethodnom primjeru na iznos, $G_0 = 35\,210,00$ KM, na kraju godine kada je plaćena redovna kamata, $K = 2\,940,04$ KM, interkalarne kamate su iznosa: 58,94 KM, 87,82 KM, 106,86 KM, 116,00 KM i 116,30 KM, za semestralne, kvartalne, mjesečne, dnevne i satne dekurzivne kapitalizacije. Najveći iznos interkalarnih dekurzivnih kamata, $K_i = 116,30$ KM, ishodile su satne dekurzivne kapitalizacije.

Ako bi povjerenik uzeo kamatu, $K = 2\,940,04$ KM, anticipativno (unaprijed, početkom godine) na iznos, $G_0 = 35\,210,00$ KM, iz prethodnog primjera, tada bi nastala anticipativna kamatna stopa (p_a), koja je veća od dogovorene dekurzivne kamatne stope, $p = 8,35\% = 0,0835$.

Iz, $p_a = \frac{p}{1-p}$, zamjenom podataka intenzitet anticipativne kamatne stope iznosi, $p_a = \frac{0,0835}{1-0,0835} = 0,091107474$.

U ovom slučaju, razlika između anticipativne i dekurzivne kamatne stope iznosi: $\Delta K = G_0(p_a - p)$, odnosno, zamjenom podataka:

$\Delta K = 35\,210,00$ KM $(0,091107474 - 0,0835) = 267,8591626$ KM $\approx 267,86$ KM. Ovaj iznos predstavljao bi neregularnu dobit na kamatama za povjerioca, a za dužnike iznos štete, te se anticipativno uzimanje kamate ne preporučuje u dužničko-povjereničkim odnosima.

Za veći broj anticipativnih kapitalizacija, tokom jednog perioda anticipativnog uzimanja redovne kamate, moguće je izvršiti obračun anticipativnih, interkalarnih kamata. Formula za obračun je ista kao kod dekurzivnih, interkalarnih kamata, samo je razlika u iznosu kamatne stope i kamatnog faktora. Obračun anticipativnih, interkalarnih kamata nije preporučljiv pošto bi povjeriocu neregularno donio dio dodatne dobiti, a dužniku isti iznos štete.

Dakle, izvedena formula, $K_i = G_{n-1}(r_1^m - m r_1 + m - 1)$, za izračunavanje iznosa dekurzivnih, interkalarnih kamata vrijedi, takođe, za izračunavanje iznosa anticipativnih, interkalarnih kamata.

3. Interkalarne kamate za rokove kraće od nominalnih

Dužničko-povjerenički odnosi iz nekih razloga mogu biti prekinuti u rokovima koji su kraći od nominalnih. Ako drugačije nije dogovoreno nominalni, odnosno jedinični rok je jedna godina.

Na osnovu ekvivalencije iznosa redovne kamate za nominalni rok i za rok koji je kraći od nominalnog, potrebno je:

- 1) izračunati kamatnu stopu za rok kraći od nominalnog,
- 2) izračunati iznos redovne kamate za rok kraći od nominalnog, i
- 3) izračunati iznos interkalarnih kamata.

Uopštenost obračuna interkalarnih kamata za rok kraći od nominalnog, ne umanjuje pretpostavka da je nominalni rok jedna godina, sa nominalnom kamatnom stopom (p) i nominalnim kamatnim faktorom (r). Rok kraći od jedne godine treba izraziti u danima (d) prema kalendaru.

Ekvivalentni kamatni faktor (r') i ekvivalentna kamatna stopa (p'), za rok kraći od nominalnog određuju relacije:

- 1) $r' = \sqrt[365]{r^d} = r^{\left(\frac{d}{365}\right)}$ i $p' = r' - 1$, ako je rok u prostoj godini, i
- 2) $r' = \sqrt[366]{r^d} = r^{\left(\frac{d}{366}\right)}$ i $p' = r' - 1$, ako je rok u prestupnoj godini.

Ako rok zahvata prostu i prestupnu godinu ili obrnuto za broj dana proste godine (d_1), broj dana prestupne godine (d_2) i broj dana roka ($d = d_1 + d_2$), ekvivalentni kamatni faktor (r') i ekvivalentnu kamatnu stopu (p') određuje relacija:

$$r' = r^{\left(\frac{d_1}{365} + \frac{d_2}{366}\right)}, \text{ odnosno, } p' = r' - 1.$$

Iznos redovne, dekurzivne kamate (K) određuje relacija: $K = G_{n-1} p' = G_{n-1} (r' - 1)$.

Za skraćene rokove plaćanja redovnih kamata, interkalarne, dekurzivne kamate možemo izračunati primjenom formule: $K_i = G_{n-1} [(r_1')^m - m r_1' + m - 1]$, gdje je (r_1') konformni, dekurzivni, kamatni faktor za jedan od (m) perioda kapitalizacija.

U ovom slučaju skraćeni rok plaćanja redovnih kamata predstavlja nominalni (jedinični), vremenski interval za koji vrijedi nominalna kamatna stopa (p') i nominalni kamatni faktor (r_1') i konformna kamatna stopa (p') povezani relacijama:

$$r_1' = \sqrt[m]{r'} = r^{\left(\frac{1}{m}\right)}, \text{ odnosno, } p_1' = r_1' - 1.$$

Skraćeni rokovi imaju isti broj (m) kapitalizacija sa kraćim vremenskim intervalom jedne kapitalizacije u odnosu na nominalni (redovni) rok od jedne godine.

Za semestralne, kvartalne, mjesečne i dnevne kapitalizacije jedne godine kao redovnog roka, odgovarajuće vremenske intervale skraćenog roka dužine (d) dana, određuju relacije:

$$1) s' = \frac{d}{2} \text{ dana (za } m = 2),$$

$$2) k' = \frac{d}{4} \text{ dana (za } m = 4),$$

$$3) M' = \frac{d}{12} \text{ dana (za } m = 12),$$

$$4) D' = \frac{d}{365} \text{ dana (za prostu godinu i } m = 365), \text{ i}$$

$$5) D' = \frac{d}{366} \text{ dana (za prestupnu godinu i } m = 366).$$

Vremenski intervali (s' , k' , M' , D') jedne kapitalizacije skraćenog roka izraženi su u danima cijelih ili decimalnih mjernih brojeva, kao matematičke forme.

Iznesenu teoriju možemo primijeniti na primjerima iz prakse.

Primjer 3.

Izračunati iznos redovnih, dekurzivnih kamata i interkalarnih kamata, ako je skraćen rok plaćanja sa jedne godine na 253 dana. Ostale podatke koristiti iz prethodnog zadatka, a izračunavanje kamata izvršiti za semestralne, kvartalne, mjesečne i dnevne kapitalizacije.

Podaci:

$G_0 = 35\,210,00$ KM (iznos početnog kapitala)

$p = 8,35\%$ (godišnja kamatna stopa)

$d = 253$ dana (skraćeni rok plaćanja redovnih kamata)

a) $m = 2$ (broj kapitalizacija u roku, $d = 253$ dana)

b) $m = 4$ (broj kapitalizacija u roku, $d = 253$ dana)

c) $m = 12$ (broj kapitalizacija u roku, $d = 253$ dana)

d) $m = 365$ (broj kapitalizacija u roku, $d = 253$ dana za prostu godinu)

Nominalni, konformni kamatni faktor (r') određuje relacija:

$$r' = \sqrt[365]{r^{253}} = r^{\left(\frac{253}{365}\right)}, \text{ odnosno, za, } r = 1,0835$$

$$r' = 1,0835^{\left(\frac{253}{365}\right)} = 1,057162348, \text{ odakle je, } p' = 0,057162348.$$

Redovna kamata za period, $d = 253$ dana, određuje, $K = G_0 p'$, odnosno zamjenom podataka:

$$K = 35210,00 \cdot 0,057162348 = 2012,686273 \approx 2012,69 \text{ KM.}$$

a) Interkalarnе kamate skraćenog roka za, $m = 2$

Konformni, dekurzivni kamatni faktor (r_1'), za jedan od (m) perioda kapitalizacije određuje relacija, $r_1' = \sqrt[m]{r'} = (r')^{\frac{1}{m}}$, odnosno, zamjenom podataka:

$$r_1' = 1,057162348^{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1,028184005$$

Interkalarnе kamate za skraćeni rok, $d = 253$ dana, određuje formula,

$$K_i = G_0 [(r_1')^m - m r_1' + m - 1], \text{ odnosno, zamjenom podataka:}$$

$$K_i = 35210,00 \text{ KM} (1,028184005^2 - 2 \cdot 1,028184005 + 1) = 27,96864583 \text{ KM} \approx 27,97 \text{ KM}$$

Zbir redovne i interkalarnе kamate iznosi:

$$K + K_i = (2012,69 + 27,97) \text{ KM} = 2040,66 \text{ KM.}$$

Istim postupkom su izračunate interkalarnе kamate za: $m = 4$, $m = 12$ i $m = 365$ (pogledati tabelarni pregled podataka)

m	p_i i r_1	K	K_1	K_i	$K + K_i$
2	0,028 184 005 1,028 184 005	2 012,69	992,36	27,97	2 040,66
4	0,013 994 085 1,013 994 085	2 012,69	492,73	41,76	2 054,45
12	0,004 643 103 1,004 643 103	2 012,69	163,48	50,88	2 063,57
365	0,000 152 308 1,000 152 308	2 012,69	5,36	55,27	2 067,96

U koloni (K_1) tabele nalaze se iznosi redovnih, dekurzivnih kamata za jedan od (m) perioda kapitalizacije.

Za skraćeni rok, $d = 253$ dana, plaćanja redovnih kamata određene su dužine vremenskih intervala u zavisnosti od broja kapitalizacija (m):

$$1) s' = \frac{253}{2} \text{ dana} = 126,5 \text{ dana} = 126 \text{ dana } 12 \text{ sati (za } m = 2),$$

$$2) k' = \frac{235}{4} \text{ dana} = 63,25 \text{ dana} = 63 \text{ dana } 6 \text{ sati (za } m = 4),$$

$$3) M' = \frac{235}{12} \text{ dana} = 21,08(3) \text{ dana} = 21 \text{ dan } 2 \text{ sata (za } m = 12),$$

$$4) D' = \frac{253}{365} \text{ dana} = 0,693150684 \text{ dana} = 16 \text{ sati } 38 \text{ minuta (za } m = 365).$$

Dakle, moguće je izračunati iznos interkalarnih kamata za bilo koji rok (d) koji je kraći od nominalnog vremenskog intervala koji je u ovom primjeru jedna godina.

4. Interkalarne kamate za (n) rokova plaćanja redovnih kamata

Formula, $K_i = G_{n-1} (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, je izvedena za izračunavanje iznosa interkalarnih, dekurzivnih kamata za bilo koji nominalni rok plaćanja redovnih kamata.

Po rokovima prethodna formula ima oblik:

$(K_i)_1 = G_0 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, za 1. rok plaćanja redovnih kamata,

$(K_i)_2 = G_1 (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, za 2. rok plaćanja redovnih kamata,

.....
 $(K_i)_n = G_{n-1} (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, za n-ti rok plaćanja redovnih kamata.

Iznosi kapitala, G_0, G_1, \dots, G_n mogu predstavljati rastući ili opadajući brojni niz što zavisi od vrste dužničko-povjereničkih odnosa. Za ulaganja taj niz je u rastućem poretku, a za otplatu zajmova niz je u opadajućem poretku.

Zbir interkalarnih kamata od $(K_i)_1$ do $(K_i)_n$ određuje relacija:

$(K_i)_1 + (K_i)_2 + \dots + (K_i)_n = (G_0 + G_1 + \dots + G_{n-1}) (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, ili kraće napisano,

$$\sum_{i=1}^n (K_i)_j = \sum_{k=0}^{n-1} G_{n-1} (r_1^m - m r_1 + m - 1).$$

Koristeći neke podatke iz prethodnog primjera pokazaćemo primjenu relacije za zbir interkalarnih kamata za (n) uplata redovne kamate i interkalarnih kamata.

Primjer 4.

Ugovorena je otplata zajma iznosa, 35 210,00 KM sa 4 jednake, dekurzivne, godišnje otplate. Godišnja kamatna stopa je 8,35% uz mjesečne, dekurzivne kapitalizacije. Napraviti otplatni plan zajma sa iznosima interkalarnih kamata.

Podaci:

$G_0 = 35\,210,00$ KM (iznos zajma; početni kapital)

$p = 8,35\%$ (godišnja kamatna stopa)

$v = 4$ godine (broj otplata sa uplatama redovnih kamata)

$m = 12$ (broj godišnjih, dekurzivnih kapitalizacija)

Otplatni plan sa interkalarnim kamatama?

Intenzitet mjesečnog, konformnog, dekurzivnog kamatnog faktora određuje

relacija, $r_1 = \sqrt[12]{1,0835} = 1,0835^{\left(\frac{1}{12}\right)} = 1,006705427$

Iznos godišnje, dekurzivne otplate (A) određuje:

$$A = \frac{35\,210,00 \text{ KM}}{4} = 8\,802,50 \text{ KM}$$

Ostaci duga, G_0, G_1, G_2, G_3 i G_4 imaju iznose:

$G_0 = 35\,210,00$ KM (iznos zajma),

$G_1 = G_0 - A = 26\,407,50$ KM (ostatak duga krajem 1. godine),

$G_2 = G_1 - A = 17\,605,00$ KM (ostatak duga krajem 2. godine),

$G_3 = G_2 - A = 8\,802,50$ KM (ostatak duga krajem 3. godine), i

$G_4 = G_3 - A = 0,00$ KM (ostatak duga krajem 4. godine).

Redovne, dekurzivne, godišnje kamate imaju iznose:

$K_1 = G_0 p = 35\,210,00 \text{ KM} \cdot 0,0835 = 2\,940,035$ KM (za 1. godinu),

$$K_2 = G_1 p = 26\,407,50 \text{ KM} \cdot 0,0835 = 2\,205,026 \text{ KM (za 2. godinu),}$$

$$K_3 = G_2 p = 17\,605,00 \text{ KM} \cdot 0,0835 = 1\,470,018 \text{ KM (za 3. godinu),}$$

$$K_4 = G_3 p = 8\,802,50 \text{ KM} \cdot 0,0835 = 735,009 \text{ KM (za 4. godinu),}$$

Zbir redovnih kamata iznosi: $K_1 + K_2 + K_3 + K_4 = 7\,350,088 \text{ KM.}$

Zbir ostataka duga iznosi:

$G_0 + G_1 + G_2 + G_3 = 88\,025,00 \text{ KM}$ (potreban je za izračunavanje ukupnog iznosa interkalarnih kamata).

Ukupan iznos interkalarnih kamata određuje formula:

$$\sum_{j=1}^n (K_i)_j = \sum_{k=0}^{n-1} G_k (r_1^m - m r_1 + m - 1), \text{ odnosno, zamjenom podataka,}$$

$$\sum_{j=1}^4 (K_i)_j = 88\,025,00 \text{ KM} \cdot (1,006705427^{12} - 12 \cdot 1,006705427 + 11) =$$

$= 267,145\,479\,1 \text{ KM, a poslije zaokruživanja,}$

$$\sum_{j=1}^4 (K_i)_j = 267,145 \text{ KM.}$$

Primjenom formule: $K_i = G_{n-1} (r_1^m - m r_1 + m - 1)$, zamjenom podataka izračunati su iznosi interkalarnih kamata za svaku godinu posebno, i to:

$$(K_i)_1 = 106,858 \text{ KM (za 1. godinu)}$$

$$(K_i)_2 = 80,144 \text{ KM (za 2. godinu)}$$

$$(K_i)_3 = 53,429 \text{ KM (za 3. godinu)}$$

$$(K_i)_4 = 26,715 \text{ KM (za 4. godinu)}$$

Zbir godišnjih, interkalarnih kamata iznosi: $267,146 \text{ KM}$, što je za $0,01 \text{ KM}$ veći od izračunatog iznosa $267,145 \text{ KM}$ dobijenog direktno pomoću formule za zbir svih interkalarnih kamata.

Preporučljivo je u tabelu otplatnog plana zajma unijeti otplaćene iznose (O_n).

Otplaćene iznose određuje relacija, $O_n = n A$, te zamjenom podataka proizilazi:

$$O_1 = A = 8\,802,50 \text{ KM (otplaćeni iznos na kraju 1. godine)}$$

$$O_2 = 2A = 17\,605,00 \text{ KM (otplaćeni iznos na kraju 2. godine)}$$

$$O_3 = 3A = 26\,407,50 \text{ KM (otplaćeni iznos na kraju 3. godine)}$$

$$O_4 = 4A = 35\,210,00 \text{ KM (otplaćeni iznos na kraju 4. godine)}$$

Pri otplati zajmova zbir otplate (A) i kamate (K_n) ima naziv anuitet (a_n) ili otplatna rata (R_n). U ovom slučaju pored redovne kamate, dužnik plaća i interkalarne kamate ($(K_i)_n$) te iznos anuiteta (a_n) određuje relacija: $a_n = A + K_n + (K_i)_n$.

Zamjenom podataka anuiteti (a_n) imaju iznose:

$$a_1 = A + K_1 + (K_i)_1 = 11\,849,393 \text{ KM (za 1. godinu)}$$

$$a_2 = A + K_2 + (K_i)_2 = 11\,087,670 \text{ KM (za 2. godinu)}$$

$$a_3 = A + K_3 + (K_i)_3 = 10\,325,947 \text{ KM (za 3. godinu)}$$

$$a_4 = A + K_4 + (K_i)_4 = 9\,564,224 \text{ KM (za 4. godinu)}$$

Ukupan zbir anuiteta, $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 42\,827,234 \text{ KM}$, treba da bude jednak ukupnom zbiru otplata, redovnih kamata i interkalarnih kamata. To je ujedno jedna od kontrola tačnosti otplatnog plana zajma. (pogled tabelarni pregled otplatnog plana).

n	G_n	A	K_n	$(K_i)_n$	$K_n + (K_i)_n$	a_n	O_n
0	35 210,00	---	---	---	---	---	---
1	26 407,50	8 802,50	2 940,035	106,858	3 046,893	11 849,393	8 802,50
2	17 605,00	8 802,50	2 205,026	80,144	2 285,170	11 087,670	17 605,00
3	8 802,00	8 802,50	1 470,018	53,429	1 523,447	10 325,947	26 407,50
4	---	8 802,50	735,009	26,715	761,724	9 564,224	35 210,00
$\sum_{i=0}^4$	88 025,00	35 210,00	7 350,088	267,146	7 617,234	42 827,234	88 025,00

Tabela otplatnog plana zajma sa dekurzivnim, jednakim otplatama i interkalarnim kamatama

Koristeći sve načine provjere otplatnog plana zajma možemo se uvjeriti da je otplatni plan zajma tačan.

Zaključak

U uvodnom dijelu autori ovog članka istakli su tri cilja:

- 1) definisati pojam interkalarnih kamata,
- 2) izvesti odgovarajuće formule za obračun interkalarnih kamata, i
- 3) predložiti odgovarajuće primjene definisanjem pojma interkalarnih kamata.

Ciljevi su postignuti uvođenjem odgovarajućeg broja veličina i njihovih međusobnih relacija. Posebno je važan odgovarajući broj izvedenih formula koje prezentuju uvedenu teoriju. Doprinos primjeni interkalarnih kamata su urađeni primjeri koji pored matematičke osnove imaju snažnu vezu između uvedene teorije i primjene.

Autori takođe, ističu regularnost primjene interkalarnih kamata u dužničko-povjereničkim odnosima i predstavlja jedan od oblika uspostavljanja finansijske discipline. U inflatornim uslovima poslovanja sa nižim stopama interkalarne kamate imaju posebnu opravdanost i regularnost primjene.

Bitno je napomenuti da su interkalarne kamate između ostalog uslovljene većim brojem kapitalizacija u jednom otplatnom roku redovnih kamata. Veći broj kapitalizacija doprinio je bržem protoku kapitala te povjerenike (banke, preduzeća i druge pravne subjekte) uslovljavaju na uvođenje odgovarajuće računarske i druge opreme i obezbjeđivanje adekvatnih stručnih uposlenika.

Dakle, veći broj kapitalizacija u dužničko-povjereničkim odnosima je naša sadašnjost, a kontinuirane (neprekidne) kapitalizacije su naša budućnost. U ovakvim uslovima poslovanja obračun i uzimanje interkalarnih kamata je regularan postupak.

Literatura:

- 1) Relić B., Finansijska matematika 1, Zagreb, 1990.
- 2) Relić B., Šego B., Finansijska matematika 2, Zagreb, 1990.
- 3) Harald Kohler, Finanz-mathematik Anfl. München – Wien, Hanser, 1990.
- 4) Dr. Trklja B., Finansijska matematika, Beograd, 1980.
- 5) Dr. Krčmar M., Viši kurs finansijske matematike, Srajevo, 1989.
- 6) Mešanović S., Delić A., Finansijska matematika, Tuzla, 2006.
- 7) Relić B., Grotić Z., Vašiček D., Obračun zateznih kamata, Zagreb, 1995.
- 8) Šego B., Modeli otplate kredita s revalorizacijom, Zagreb, 1991.
- 9) Tumbas A., Privredna i finansijska matematika, Subotica, 1982.
- 10) Dr. Ralević R., Finansijska i aktuarska matematika, Beograd, 1975.
- 11) Dr. Ivoić M., Finansijska matematika, Beograd, 2003.
- 12) Dr. Martić Lj., Matematičke metode za ekonomske analize, Zagreb, 1987.